

Folgen und Reihen

1. (a) Zeigen Sie, dass die durch die Vorschrift $a_n = (n + 1)^2 - n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) gegebene Folge eine arithmetische Folge ist.
(b) Berechnen Sie die Summe der ersten 100 Folgenglieder.

Lösung: $a_n = 2n + 1$, $s_{100} = 10200$ (a_1 bezeichnet das kleinste Folgenglied.)

2. Eine Folge von Zahlen, in welcher der Unterschied je zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist, heißt *arithmetische Folge*.
Betrachtet werde nun eine aufsteigende arithmetische Folge mit vier Gliedern. Addiert man zum ersten Folgenglied 1, zum zweiten 8, zum dritten 35 und zum vierten 122, so erhält man eine geometrische Folge. Bestimmen Sie die Glieder der beiden Folgen!

Lösung: arithmetische Folge: 4, 7, 10, 13 geometrische Folge: 5, 15, 45, 135

3. Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q = 0,8$ hat den Wert 420,2. Wie heißen der erste und der letzte Summand?

Lösung: $a_1 = 125$; $a_5 = 51,2$

4. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist die Summe aus dem 2. und 4. Glied 102. Das 6. Glied ist 1536.
Berechnen Sie die Summe der ersten 7 Glieder.

Lösung: Anfangswert $a = 1,5$; Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $q = 4$; $s_7 = 8191,5$

5. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist das Produkt aus dem zweiten und vierten Glied gleich 1296, das fünfte Glied ist 16. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

Lösung: Es ist $a_1 = aq^0 = 81$, $q = \frac{2}{3}$ und $s_{10} = \sum_{i=0}^9 aq^i = a \frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{58025}{243}$

6. Berechnen Sie den Wert der Summe $-3 + 6 - 12 + 24 - \dots - 3072$ mit Hilfe der Summenformel für geometrische Folgen.

Lösung: -2049

7. Bei einer geometrischen Folge mit positiven rationalen Gliedern beträgt die Summe des ersten und dritten Gliedes 20, die Summe des ersten und fünften Gliedes 17. Wie lautet das erste und das zehnte Glied dieser Folge?

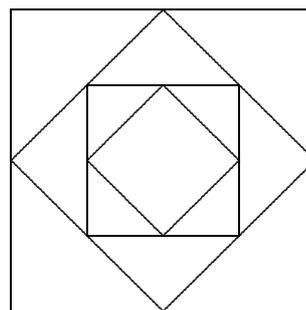
Lösung: $16, \frac{1}{32}$

8. Der Brahmane Sissa, Erfinder des Schachspiels, erbat sich auf Aufforderung des indischen Königs Shehram hin als Belohnung für seine Erfindung diejenige Summe Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein einziges Weizenkorn, auf das zweite Feld zwei, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld acht Körner usw. legt.

- (a) Welche Summe von Weizenkörnern ergäbe sich?
- (b) Welches Gewicht hätten diese insgesamt, wenn 20 Körner durchschnittlich 1 g wiegen?
- (c) Wie hoch könnte eine quadratische Fläche der Seitenlänge 100 km damit bedeckt werden, wenn 15 Körner etwa 1 cm^3 Raum einnehmen?

Lösung: (a): $2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$ (b): $9,22 \cdot 10^{11} \text{ t}$ (c): ca. 120 m

9. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a wird ein zweites Quadrat derart einbeschreiben, dass dessen Ecken in den Seitenmitten des ersten liegen. Setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht eine Folge von Quadraten. (vgl. Abb)



- (a) Stellen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des n -ten Quadrats mit Hilfe der Seitenlänge a des ersten Quadrats dar.
- (b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge der ersten 10 Quadrate für $a = 15 \text{ cm}$.

Lösung: $A_n = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $U_n = 4a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$; $S_{10} \approx 198.5 \text{ cm}$

Viel Erfolg!