

Aufgabenbeispiel zum Thema Polstelle, Lücke, Stetigkeit

$$f(x) := \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3}$$

Ermittlung des Definitionsbereiches:

Der Nenner des Bruches darf nicht Null werden. Eine Division durch Null ist nicht definiert.

$$x^2 - 2 \cdot x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow 3 \quad x + 1 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

Unterscheidung Polstelle/Lücke:

$$Z(x) := 4 \cdot x^2 + x - 3 \quad N(x) := x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$$\begin{array}{llll} x_0 := -1 & Z(-1) = 0 & \Rightarrow \text{Lücke} & x_0 := 3 \quad Z(3) = 36 \\ & N(-1) = 0 & & N(3) = 0 \quad \Rightarrow \text{Polstelle} \end{array}$$

$$g_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4}{1} \quad g_1 = 4$$

$$g_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4}{1} \quad g_2 = 4$$

Konvergenznachweis für g2:

$$\left| \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} - 4 \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x < x_\varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon \text{ Element } \mathbb{R}^+$$

$$\left| \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} - \frac{4 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 3)}{x^2 - 2 \cdot x - 3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} - \frac{4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 12}{x^2 - 2 \cdot x - 3} \right| < \varepsilon$$

$$4 \cdot x^2 + x - 3 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{4 \cdot x^2 + x - 3 - 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 12}{x^2 - 2 \cdot x - 3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{9 \cdot x + 9}{x^2 - 2 \cdot x - 3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{9 \cdot (x + 1)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{9}{(x - 3)} \right| < \varepsilon$$

Für $x \rightarrow -\infty$ ist dieser **Nenner** immer negativ!!!!

$$-\left(\frac{9}{x-3}\right) < \varepsilon$$

$$\frac{-9}{\varepsilon} > x - 3$$

$$x < 3 - \frac{9}{\varepsilon}$$

Also ist g2 GW für $x \rightarrow -\infty$ für $f(x)$

Grenzwertberechnung für $x \rightarrow x_0$:

$$g_3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{n}\right) - 3}{\left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{n}\right) - 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} - 3}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-7}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{-4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(-7 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(-4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$g_4 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{n}\right) - 3}{\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right) - 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36 - \frac{24}{n} + \frac{4}{n^2} + 3 - \frac{1}{n} - 3}{9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} - 6 + \frac{2}{n} - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36 - \frac{25}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{-4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(36 \cdot n - 25 + \frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(-4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\infty}{-4} = -\infty$$

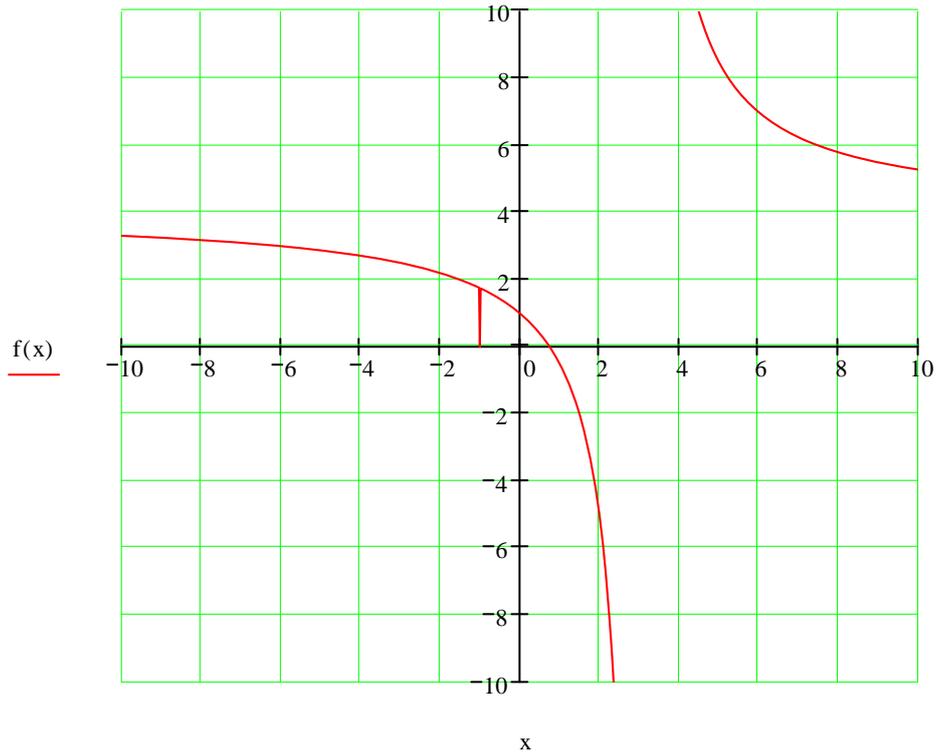
Stetigkeit und stetige Fortsetzung:

Die Lücke kann "repariert", d.h. geschlossen werden. Bem: $f^* = f_{\text{neu}}$

$$f(x) := \frac{(4 \cdot x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \quad f_{\text{neu}}(x) := \frac{4 \cdot x - 3}{x - 3} \quad f_{\text{neu}}(-1) = \frac{7}{4} = \text{stetige Fortsetzung}$$

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2 \cdot x - 3} & \text{für } x \text{ ungleich } -1 \text{ und } 3 \\ \frac{7}{4} & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Graph:



Beachte das Verhalten bei der **Lücke $x_0 = -1$** !!!! (g_3)

Es liegt eine waagerechte Asymptote vor bei $y = 4$ ($g_1 = g_2 = 4$)

Es liegt eine senkrechte Asymptote vor bei $x_0 = 3$ ($g_3 = \pm \infty$)