Zusammenfassung: Erwartungswert, Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

Unter einer Zufallsvariablen X eines Zufallsexperimentes versteht man eine Funktion, die jedem Ergebnis e_i der Ergebnismenge E dieses Experimentes eine Zahl zuordnet.

$X: e_i \to X(e_i)$ in Analogie zur Funktion f mit $f: x \to f(x)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

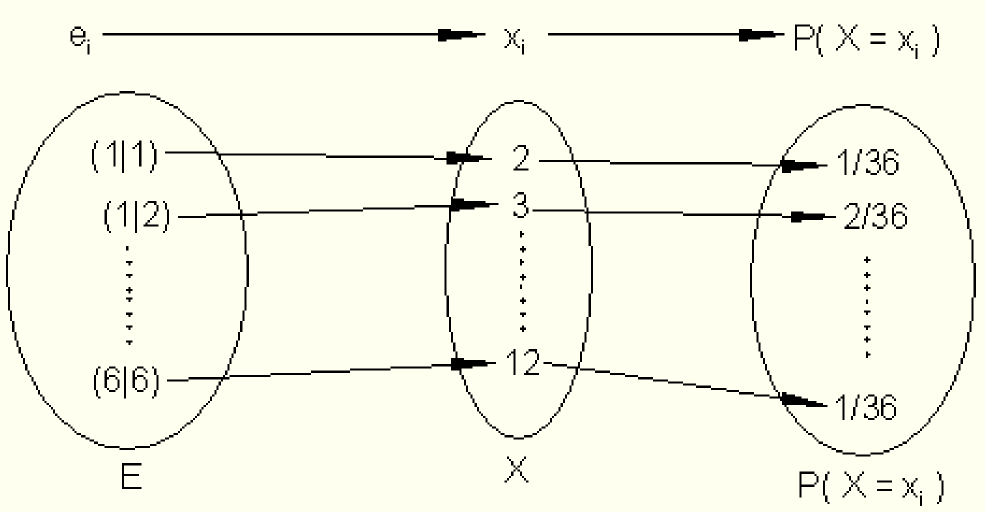
Wird beim werfen mit zwei Würfeln jedem Ergebnis die Augensumme zugeordnet, so entsteht die Zufallsvariable X.
Ordnet man nun jedem Wert dieser Zufallsvariablen ihre Wahrscheinlichkeit zu, so entsteht eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (Wahrscheinlichkeitsfunktion). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilung der Zufallsgröße kann man durch eine Tabelle und ein **Histogramm** darstellen

Unter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsfunktion) f der Zufallsvariablen X versteht man die Funktion f mit

$$f: x_i \to P(X = x_i)$$

Der Funktionswert $f(x) = P(X = x_i)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert x_i annimmt.

Funktionsdarstellung zum Beispiel werfen zweier Würfel, deren Augensumme gebildet wird.



Hat eine Zufallsvariable X die Werte $x_1; x_2; \ldots; x_n$ dann heißt:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Erwartungswert von X

Ist $E(X) > 0$, so nennt man das Spiel günstig für den Spieler.
Ist $E(X) = 0$, so nennt man das Spiel fair.
Ist $E(X) < 0$, so nennt man das Spiel ungünstig (unfair) für den Spieler.

Viele Zufallsexperimente können als Experimente mit zwei Ergebnissen interpretiert werden, wie z.B.

- Münzwurf mit den Ergebnissen Wappen und Zahl.
- Wurf einer Heftzwecke mit den Ergebnissen Rücken oder Spitze.
- Werfen eines Würfels mit den Ergebnissen 6 oder keine 6.

Solche Experimente heißen **Bernoulli - Experimente**. Die beiden Ergebnisse eines solchen Experiments bezeichnet man als **Erfolg** oder als **Misserfolg**. Führt man einen solchen Versuch n - mal durch, so spricht man von einem **n - stufigen Bernoulli - Versuch** oder einer Bernoullikette der Länge n. Bei n -stufigen Bernoulli - Versuchen wird verlangt, dass das Ergebnis eines Einzelversuchs nicht durch die anderen Versuche beeinflusst wird. Man interessiert sich bei einem solchen n - stufigen Versuch für die Anzahl der Erfolge oder der Misserfolge.

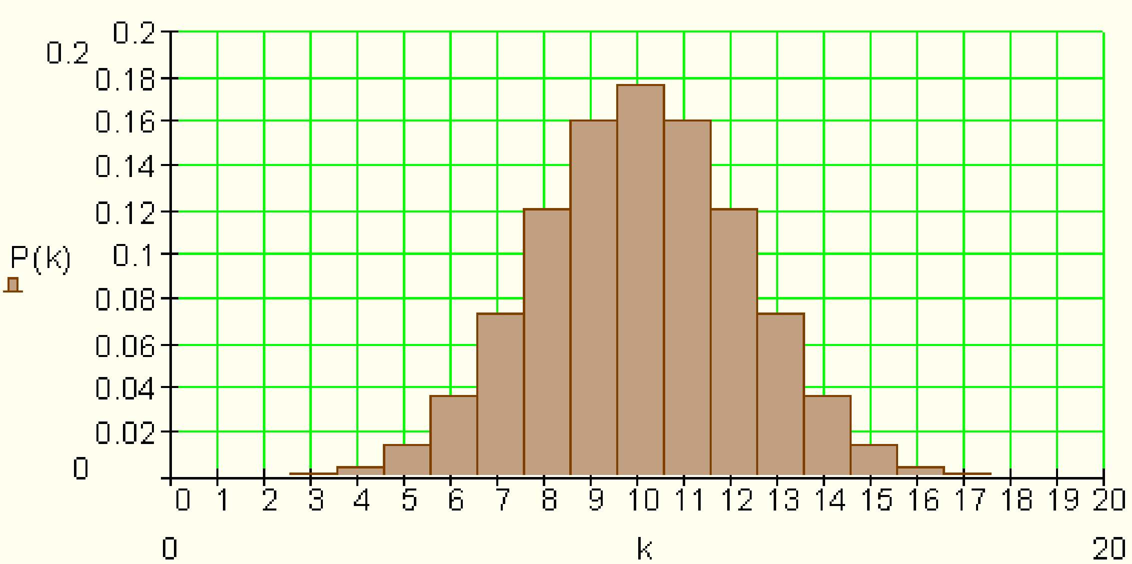
Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$, gilt für die Wahrscheinlichkeit von k Erfolgen:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung.

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{Anzahl der Pfade}\\ \text{mit k Erfolgen}}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad}\\ \text{mit k Erfolgen und n−k Misserfolgen}}}$$

Das Histogramm einer solchen Binomialverteilung sieht wie folgt aus:



Für **Intervalle** benötigen wir: